EXPONATE AUF DER MS WISSENSCHAFT 2008 – DAS MATHESCHIFF

MS WISSENSCHAFT 2008 – DAS MATHESCHIFF

Mathematik ist immer und (fast) überall! Aber wer denkt beim Wetterbericht, beim U-Bahn-Fahren oder beim Päckchenverschicken an Mathematik? In vielen Alltagsbereichen hilft Mathematik uns „unbemerkt“ – sie ist vielen Gerüchten zum Trotz eine lebendige Wissenschaft, die immer weiterentwickelt wird. Die Anwendungsmöglichkeiten sind erstaunlich vielfältig und bieten nicht nur Lösungen für Probleme aus Industrie und Wissenschaft. Auch in Kunst und Musik gibt Mathematik manchmal den Takt vor.

Wo Mathe drin steckt und was sie alles kann, das zeigt die Ausstellung an Bord des 105 m langen Binnenfrachtschiffs. Lassen Sie sich überraschen von der Vielfältigkeit der Mathematik! Auf gut 600 m² Ausstellungsfläche laden über 30 Exponate zum Mitmachen, Mitforschen und Ausprobieren ein. Die Ausstellungsbereiche Natur, Technik, Mensch und Geist zeigen, wo wir auf Mathematik zählen können. Zusätzlich erwarten Sie Spiele, Filme, Bühnenshows sowie eine Station zum Känguru-Wettbewerb der Mathematik. Junge Wissenschaftler sind als Ausstellungslotsen dabei und beantworten mögliche Fragen.

Die *MS Wissenschaft* ist ein Projekt von Wissenschaft im Dialog im Rahmen des Jahres der Mathematik. Es wird finanziell unterstützt vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) und der Klaus Tschira Stiftung (KTS). Die Exponate werden von den deutschen Wissenschaftsorganisationen und Hochschulen zur Verfügung gestellt.

Die Ausstellung ist geeignet für Menschen ab 8 Jahren.

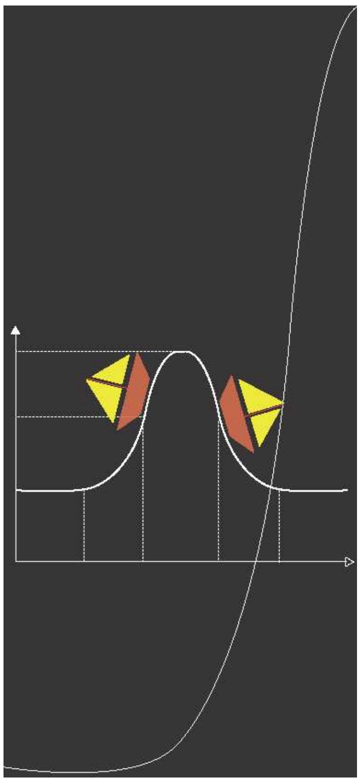
Öffnungszeiten:

In der Schulzeit:
Montag bis Freitag: 9 – 19 Uhr
Samstag und Sonntag: 10 bis 19 Uhr

In der Ferienzeit:
Montag bis Sonntag: 10 – 19 Uhr

Eintritt frei!

Buchungen für Schulklassen und Gruppen > 10 Personen unter www.ms-wissenschaft.de!


Zymryte Hoxhaj 2008

Kontakt:
Wissenschaft im Dialog gGmbH
Beate Langholf
Telefon 0 30/ 20 62 295 50
E-Mail beate.langholf@w-i-d.de

AUSSTELLUNGSBEREICH NATUR

1. Galton’sches Brett

Wie oft entscheidet der Zufall über den Ausgang eines Experiments! Und dennoch: Auch der Zufall unterliegt gewissen Gesetzmäßigkeiten.

Der englische Universalgelehrte Sir Francis Galton (1822-1911) stellte im Jahr 1889 ein mechanisches Zufallsexperiment vor: Über ein geneigtes Nagelbrett rollen Kugeln. Die Richtung jeder Kugel wird beim Zusammenprall mit Nägeln oder anderen Kugeln abgelenkt. So entscheidet der Zufall, in welchem der Fächer jede Kugel landet. Die meisten Kugeln sammeln sich in den mittleren Fächern; außen dagegen werden weniger Kugeln gezählt. Diese Verteilung der Kugeln kommt dem Profil eines Glockenquerschnitts – der sogenannten Gauss’schen Glockenkurve – sehr nahe. Diese spielt immer dann eine Rolle, wenn viele zufällige Einzelereignisse sich additiv überlagern. Im Grenzfall von ‚unendlich vielen’ Einzelereignissen erhält man die so genannte (Gauss’sche) Normalverteilung.

Stellt man den Versuch z. B. mit 256 Kugeln in gleichmäßigen Sechsecken an, so landen bei vier Versuchsläufen im Durchschnitt 63 Kugeln in Fach 5, jeweils 30 Kugeln in den Fächern 3 und 7, jeweils 1 Kugel in den Fächern 0 und 10. Die konkreten Werte sind zufälligen Schwankungen unterworfen.

Das Institut für Mathematische Stochastik der TU Dresden verbindet theoretische Grundlagenforschung mit Anwendungen der Stochastik in Wissenschaft und Praxis, z. B. in Versicherungs- und Finanzmathematik.

~~~~~~

2. Gezeiten berechnen

Wer kennt sie nicht – die Gezeitenkalender, die in Urlaubsorten an der Nordsee ausliegen? Doch wie lassen sich die Gezeiten überhaupt auf Monate im Voraus berechnen?

Die mathematische Vorausbestimmung der Gezeiten gehört zu den komplexesten Aufgaben der physikalischen Geographie. Astronomische und geographische Aspekte müssen berücksichtigt werden. Die Unregelmäßigkeit der realen Kurvenformen des wechselnden Wasserstandes macht eine direkte Vorausberechnung unmöglich. Deshalb werden die Kurven nach dem mathematischen Verfahren der **Fourier-Analyse** in möglichst viele gleichmäßige Sinuskurven zerlegt. Sinuskurven lassen sich leicht nach Periode, Phase und Amplitude vorausberechnen. Die entstandenen Kurven werden nach der **Fourier-Synthese** addiert und damit wieder zur unregelmäßigen, nun vorausberechneten Kurvenform zusammengesetzt: Die Mathematik hat scheinbar Unmögliches möglich gemacht.

Im 19. Jahrhundert brauchten geübte Rechner rund ein **Vierteljahr**, um die Jahreswerte der Gezeiten eines Hafens vorauszuberechnen. Die auf Lord Kelvin zurückgehenden analogen Gezeitenrechenmaschinen beschleunigten die Rechnung erheblich: Die erste deutsche Gezeitenrechenmaschine von 1915/16 errechnete die Jahreswerte eines Hafens in ca. **12 Stunden**. Die Computer-Animation zeigt die Funktionsweise der Maschine: Ein Stahlband summiert die Bewegungen der einzelnen Tidengetriebe zur eigentlichen Gezeitenkurve. Heute übernehmen Großrechner diese Funktion.

Das Deutsche Schiffahrtsmuseum macht in seinem weltweit einzigartigen Ausstellungsbereich ‚Gezeiten’ einen für Schifffahrt, Verkehr und Küstenschutz wichtigen Forschungsbereich für die Öffentlichkeit verständlich.
~~~~~~

3. Hochwassersimulation

Wie können Dörfer und Städte nach extremen Regenfällen möglichst frühzeitig vor Überschwemmungen durch überflutende Flüsse geschützt werden? - Ausgefeilte Software-Programme ermöglichen eine Hochwassersimulation.

Die Wasserströmung wird durch partielle Differentialgleichungen beschrieben, d. h. durch Beziehungen zwischen Funktionen im dreidimensionalen Raum und in der Zeit und deren Ableitungen. Für Strömungssimulationen teilt man ein Berechnungsgebiet in viele kleine Zellen auf. Um die Änderung des Wasserstands zu berechnen, wird für jede Zelle festgestellt, ob mehr Wasser von den Nachbarzellen in diese hinein als aus ihr heraus fließt. Die zeitliche Aneinanderreihung dieser Berechnungen ergibt die Simulation des Fließvorgangs. Mathematisch betrachtet, werden Ableitungen in den partiellen Differentialgleichungen durch Differenzquotienten ersetzt. Für eine hohe Genauigkeit können 100 000 Zellen und einige 10 000 Zeitschritte notwendig sein.

Die Hochwassersimulation dient zur Bewertung von Maßnahmen im Hochwasserschutz. Dabei werden Aspekte veranschaulicht, die für die Berechnung wichtig sind. Anhand eines Schnitts durch eine Landschaft mit Bodenprofil und Wasserstand wird der zeitliche Verlauf des Wasserabflusses berechnet und dargestellt. Die Intensität des Regens und die Beschaffenheit der Erdoberfläche lassen sich verändern. Durch Veränderung der Anzahl der Zellen lässt sich ein Kompromiss zwischen der Genauigkeit des Ergebnisses und der benötigten Rechenzeit für die Simulation finden.

Die mathematisch orientierten Fraunhofer-Institute ITWM und SCAI entwickeln mit Partnern Software zur Simulation der Fließvorgänge auf der Erdoberfläche, im unterirdischen Kanalsystem und im Grundwasser.

~~~~~~

4. Schneller – höher – kleiner

Betrachten Sie einen Zylinder, ein massives Katenoid und ein massives Rotationsparaboloid. Welcher der drei Körper hat die kleinste Oberfläche?

Die Natur ist sehr effizient - optimierte Strukturen kommen häufig vor. Geht es um die Optimierung von Oberflächen, so sprechen wir von „**Minimalflächen**“, wenn bei vorgegebenem Umfang die kleinstmögliche Fläche aufgespannt wird. **Seifenblasen** sind ein Beispiel dafür: Sie formen sich stets so, dass ihre Oberfläche so klein wie möglich ist. Doch auch in Technik und Architektur spielen Minimalflächen eine große Rolle. So werden Brücken und Kuppeln oft nach ähnlichen Optimierungsprinzipien konzipiert. Auch das Dach des **Münchner Olympiastadions** und das der **Berliner Kongresshalle** sind nach solchen Gesichtspunkten konstruiert: Ihre Form leitet sich von Seifenhäuten ab.

Von den drei Körperoberflächen Zylindermantel, Katenoid und Rotationsparaboloid hat das Katenoid die kleinste Oberfläche. Das Katenoid hat sogar von allen denkbaren Rotationsflächen, die den gleichen oberen und unteren Rand haben, die kleinste Oberfläche: Es ist eine Minimalfläche. Die Länge der Profilkurve, die ja beim Zylinder kürzer ist, ist also nicht ausschlaggebend!

Minimalflächen spielen eine wichtige Rolle in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Am Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik in Potsdam nutzt man die Minimalflächen beispielsweise für die Modellierung von Schwarzen Löchern.
~~~~~~

5. Im Strom der Formeln – Mathematik und Ozeanforschung

Die Ozeane haben entscheidenden Einfluss auf das Klimageschehen, der technische Aufwand sie zu erforschen ist jedoch extrem hoch. Mit Hilfe von Computersimulationen werden Ozean-Modelle entwickelt, um den Wandel der Meere verstehen zu lernen.

Ein Satellit kann nur die Oberfläche abtasten, ein Forschungsschiff nur punktuell eingesetzt werden. Eine umfassende Datensammlung in den Meerestiefen gestaltet sich nahezu unmöglich. Doch mit Hilfe **mathematischer Gleichungen** können Forscher den Ozean gut beschreiben. Durch ein System komplexer, mit Hilfe von Computern lösbarer Gleichungen lassen sich Geschwindigkeit, Temperatur und Salzgehalt abbilden. So entstehen **Ozeanmodelle**, die faszinierende Einblicke in ineinander greifende Prozesse im Meer gewähren und den Ozean zu verstehen helfen. Die Modelle werden immer wieder mit echten **Messdaten** abgeglichen.

Die komplexen Prozesse im Ozean lassen sich mit Hilfe von Animationen anschaulich darstellen. So gibt es Simulationen bekannter Meeresströmungen – beispielsweise des **Golfstroms** oder des Agulhasstroms vor Südafrika. Der Transfer zwischen „Modell", z. B. der Golfstrom-Simulation, und „echten" Messdaten, z. B. Erhebungen der **Tiefendrifter** (Floats) im Ozean, wird über die Verbindung von Animation und Forschungsgerät erreicht.

*Im Kieler Exzellenzcluster ‚**Ozean der Zukunft**' erforschen rund 140 Wissenschaftler fachübergreifend die Chancen und Risiken des **Ozeanwandels**, um ein weltweites Management der Ozeane zu entwickeln.*

~~~~~~

6. Tsunami: Das Modell einer tödlichen Welle

Anhand von Computersimulationen und speziell ausgestatteten Wasserbecken lässt sich die Entstehung und Wirkungsweise von Tsunamis vorausberechnen, um die Bevölkerung möglichst frühzeitig zu warnen.

Tsunamis entstehen durch untermeerische Beben, Hangrutschungen und Vulkanausbrüche. Im **freien Ozean** laufen sie mit der Geschwindigkeit eines Düsenflugzeugs als **sehr flache Wellen**. Erst in **Küstennähe** werden sie langsamer, steilen sich dann aber zu Monsterwellen von manchmal **mehr als 30 m Höhe** auf. Richtung, Geschwindigkeit und Höhe der Tsunamiwelle hängen von ihrer Entstehungsart, dem Relief des Meeresbodens und der Küstenform ab. Mit verschiedenen Gleichungssystemen kann die Ausbreitung der Welle im Computer modelliert werden. So lässt sich auch **berechnen**, welche Küstenabschnitte gefährdet sind und wie hoch die Wellen hier auflaufen können. Diese Berechnungen sind eine wichtige Grundlage für ein Tsunami-Warnsystem.

Ein speziell für die Tsunami-Simulation entwickeltes Wasserbecken zeigt die Entstehung eines **Tsumanis** durch Bewegung des **gesamten Wasserkörpers**. Da zwischen küstennahen Erdbeben, die Tsunamis erzeugen, und dem Eintreffen der ersten Wellen am Ufer nur wenige Minuten vergehen, muss ein **Warnsystem automatisch** arbeiten. Tausende von Simulationen werden im Voraus berechnet. Im Ernstfall sucht das Alarmsystem blitzschnell die ähnlichste **Modellrechnung** heraus, so dass die gefährdeten Küstenabschnitte bestimmt und alarmiert werden können.

*Unter der Federführung des GeoForschungZentrum Potsdam (GFZ) arbeitet ein Konsortium deutscher Meereswissenschaftler und Geoforscher am **Tsunami-Frühwarnsystem GITEWS**, das 2010 der indonesischen Regierung übergeben wird.*

~~~~~~

7. Der Krümmung auf der Spur

Welche Winkelsumme kann ein Dreieck auf einer gekrümmten Oberfläche wohl erreichen? Herausfinden kann man das, indem man mit Hilfe von Schnüren verschiedene Dreiecke auf einer solchen Oberfläche aufspannt und die Winkel misst und summiert.

In der Ebene beträgt die **Winkelsumme von Dreiecken** stets 180°. Das fand bereits der griechische Mathematiker Euklid um 300 v. Chr. heraus. Auf gekrümmten Oberflächen sind hingegen auch größere und kleinere Winkelsummen möglich. Man kann sie aus der Krümmung sogar genau berechnen. Heute tauchen gekrümmte Räume in vielen Bereichen auf, z. B. im **Maschinenbau** und in der **Computergrafik**, und führen zu interessanten mathematischen Fragen.

Auf einer Kugeloberfläche ist die Winkelsumme im Dreieck immer größer als 180°. Die maximale Winkelsumme beträgt 540°. Je kleiner die Dreiecke werden, desto weniger weicht die Summe von 180° ab, da man sich den Verhältnissen in der Ebene nähert. Das bedeutet ganz einfach, dass das Dreieck von der Krümmung der Kugel nicht mehr viel mitbekommt.

Grundlage der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie ist ein gekrümmter vierdimensionaler Raum – die so genannte „Raumzeit“. Am Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik in Potsdam werden Fragestellungen zur Relativitätstheorie und zur Untersuchung gekrümmter Räume intensiv erforscht.

~~~~~~
~~~~~~

8. Fliegen wie ein Vogel (adaptiver Tragflügel)

Technische Entwicklungen orientieren sich oftmals an Vorgängen, die in der Natur zu beobachten sind. So macht sich der Flugzeugbau das Verhalten des Vogelflügels bei Temperaturschwankungen zunutze, um Tragflügel zu optimieren.

Tragflügel von Flugzeugen sind im Wesentlichen starre Flächen. Zwar besitzen sie Ruder zur Kontrolle von Auftrieb, Widerstand und Moment, doch sind auch diese starr. Der Vogel dagegen kann seine Flugbedingungen durch Veränderung der Profilform seiner Flügel optimieren. Die Lücke, die zwischen der konventionellen Flugzeuglösung und dem feinfühligen Vogelflügel klafft, kann durch den Einsatz eines adaptiven Profils verringert werden. Während des Fluges soll bei konstantem Auftrieb der Luftwiderstand in Echtzeit minimiert werden. Durch die zugehörigen Zustandsgleichungen werden die Effekte modelliert, die der Aerodynamik, dem Wärmeaustausch, der Materialtheorie und der Elastizitätstheorie zugrunde liegen.

Der Werkstoff eines adaptiven Profils ist ein Verbund von elastischem Material und Drähten aus Formgedächtnislegierungen, die ihre Länge bei Temperaturänderungen um bis zu 6% verändern. Wenn elektrischer Strom durch die Drähte fließt, erhöht sich deren Temperatur. Die Drähte ziehen sich zusammen und bilden die Deformation zurück, die ihnen durch äußere Kräfte aufgezwungen worden war. Dabei verformen die Drähte den Tragflügel. Fließt kein Strom mehr, kühlen die Formgedächtnisdrähte ab und werden zurückgedehnt.

Das Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS) betreibt projektorientierte Forschung mit dem Ziel, zur Lösung komplexer Problemkreise aus Wirtschaft, Wissenschaft und Technik beizutragen.

~~~~~~

9. Brachistochrone: Auf die Plätze – fertig – los!

Wer kommt am schnellsten zum Ziel? Diese Frage interessiert nicht nur bei Sportwettbewerben. Anhand dreier Kugeln, die vom selben Startpunkt aus über verschiedene Bahnen hinunterrollen, lassen sich geometrische Optimierungsaufgaben anschaulich darstellen.

Seit jeher spielen **geometrische Optimierungsaufgaben** eine zentrale Rolle in der Mathematik. Sie stammen häufig aus der Physik, der Technik oder der Natur: Das Licht nimmt stets den kürzesten Weg. Bei vorgegebenem Volumen hat die Kugel die kleinste Oberfläche. Bienen bauen ihre Waben in nahezu optimaler Geometrie. – Solche Optimierungsaufgaben werden häufig in der Sprache der **Variationsrechnung** formuliert und haben oft sehr ästhetische Lösungen.

Die Bahn, auf der die Kugel am schnellsten unten ankommt, nennt man **Zykloide**. Die Berechnung dieser speziellen Bahn – das „**Brachistochronenproblem**" – ist eines der bekanntesten Probleme der Variationsrechnung. Es wurde im 17. Jahrhundert von Johann Bernoulli formuliert und u. a. von Isaac Newton gelöst, der dabei die Variationsrechnung erfand.

Es gibt viele interessante, ungelöste geometrische Variationsprobleme. Sie sind ein zentraler Forschungsgegenstand am Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut). Sie sind auch deswegen sehr spannend, da sie viele interessante Disziplinen involvieren: Geometrie, Analysis und Topologie. Auch die Einstein'sche Allgemeine Relativitätstheorie lässt sich als Variationsproblem interpretieren.
~~~~~~

10. Fehler auf Kuhhäuten
Soll aus einer Kuhhaut ein hochwertiger Autositzbezug oder eine preiswerte Handtasche hergestellt werden? Die Antwort auf diese Frage ist abhängig von der Gleichmäßigkeit der Lederoberfläche.

Speziell geschultes Personal bewertet die Oberflächen meist stichprobenartig und nicht immer nach objektiven Kriterien. Die Aufgabe eines automatischen Leder-Inspektionssystems ist es, in einem computergesteuerten Vorgang Lederhäute in Qualitätsklassen einzuteilen. In den Phasen „Bildvorverarbeitung“, „Segmentierung“, „Fehlerdetektion“ und „Klassifizierung“ werden jeweils bestimmte Algorithmen, d. h. Abfolgen komplexer mathematischer Operationen ausgeführt. Eine besondere Herausforderung besteht darin, den Vorgang in einer gegebenen Zeit mit hoher Zuverlässigkeit durchzuführen.

Bei einem schwedischen Lederfabrikanten werden Kuhhäute von Hand beurteilt – besser gesagt: mit dem Auge. Die Einordnung funktioniert seit Jahren reibungslos, doch finden die Skandinavier für diese Aufgabe immer weniger Personal. Wissenschaftler entwickelten nun ein automatisches Inspektionssystem zur Qualitätskontrolle von gegerbtem Naturleder.

Eine der Kernkompetenzen der Abteilung Bildverarbeitung am Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM ist die Oberflächeninspektion für die industrielle Qualitätskontrolle.

~~~~~~

11. Fouriersynthese
Wie lässt sich mit Sinuskurven eine Rechteckkurve erzeugen?

Im Jahr 1822 beschrieb der französische Mathematiker und Physiker Jean Baptiste Joseph **Fourier** (1768 — 1830) das nach ihm benannte Theorem. Es besagt: Jede periodische Funktion kann als Summe von Sinusfunktionen dargestellt werden. Natürliche Wellenbewegungen wie auch Schwingungen in der Technik enthalten in der Regel eine Vielzahl von Frequenzen, die sich überlagern. Mit Hilfe der **Fourieranalyse** können die beteiligten Sinusfrequenzen und deren Amplituden ermittelt werden. Umgekehrt kann man durch Überlagerung einzelner Sinusschwingungen periodische Schwingungen aller Art erzeugen. Ein Beispiel ist die Rechteckkurve, die auf vielen Gebieten der Technik eine herausragende Rolle spielt.

An einer Maschine, die eigens für die Veranschaulichung der Fourieranalyse entwickelt wurde, lässt sich die Entstehung einer Rechteckkurve nachvollziehen. Vier Motoren mit Excenter erzeugen **Sinusschwingungen** mit jeweils unterschiedlichen Amplituden und Frequenzen. Auf einem Laufband werden die einzelnen Kurven sichtbar. Sind mehrere Antriebe in Bewegung, überlagern sich die erzeugten Schwingungen; es können beliebige periodische Kurven entstehen. Um eine **Rechteckkurve** zu erzeugen, müssen alle Antriebe vorgegebene Anfangsstellungen haben, die über kleine Handräder eingestellt werden.

Von 1982 bis 2004 war Prof. Otto Lührs Gestalter und Leiter des ersten Science Centers in Deutschland, dem SPECTRUM des Deutschen Technikmuseums Berlin.

~~~~~~

12. Navigationssystem für ein Binnenschiff

Wie Computer bei schlechten Sichtverhältnissen zu verlässlichen Assistenten erfahrener Schiffskapitäne werden, zeigen moderne Navigationssysteme.

Das Manövrieren großer Schiffe auf Flüssen und Küstengewässern ist eine komplexe Aufgabe, die eigentlich nur von erfahrenen Kapitänen bewältigt werden kann. Moderne **regelungstechnische Methoden** erlauben es jedoch, diese Aufgabe auch einem Computer zu übertragen. Dazu wird das normalerweise vom Kapitän genutzte Wissen über das **dynamische Verhalten** des Schiffes in Form von mathematischen Gleichungen im Rechner hinterlegt. Der Streckenverlauf wird als elektronische Karte gespeichert. Die darauf basierende **Automatisierung des Schiffsverkehrs** erhöht die Sicherheit auf Binnen- und Küstengewässern. Dies ist besonders nachts oder bei schlechten Sichtverhältnissen von Bedeutung. Der Kapität behält jedoch nach wie vor die Verantwortung.

Zur Ermittlung der genauen Position des Schiffs in der Karte werten **integrierte Navigationssysteme** Daten von **Radar**, **GPS und Wendezeiger** aus. Objekte im Fluss wie etwa Brückenpfeiler können in der Karte erkannt werden. Wenn der Kapitän dem Computer die Kontrolle über das Schiff übergibt, berechnet dieser, wie das Ruder gelegt werden muss, damit das Schiff der gewünschten Bahn folgt. Durch ständigen Vergleich von tatsächlicher und gewünschter Position korrigiert der Rechner den **Rudereingriff**.

*Das **Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme** befasst sich vorwiegend mit Fragen der Analyse, Auslegung und Führung von verfahrenstechnischen Prozessen. Dabei stehen oft regelungstechnische Problemstellungen im Vordergrund.*

~~~~~~

13. Packassistant – Packen einfach gemacht

Wer möglichst viele Teile in einer Kiste unterbringen möchte, braucht ein hervorragendes räumliches Vorstellungsvermögen. Doch vielleicht gibt es einen Weg, noch mehr Teile in derselben Kiste zu verstauen?

Zurzeit ist kein Algorithmus bekannt, um derartige Packungsprobleme in endlicher Zeit **optimal** zu **lösen**. Um die beste Lösung zu finden, müssten alle Möglichkeiten durchgerechnet werden – was alle Computerkapazitäten übersteigen würde.
Um dennoch in angemessener Zeit zu einer guten Lösung zu kommen, verwendet man Lösungsfindungsverfahren, so genannte Heuristiken, die den Suchraum einschränken. So werden schlechte Lösungen schnell erkannt und nicht weiter verfolgt. Gute Lösungen dagegen werden genauer untersucht.

Eine **Platz sparende Anordnung** von Teilen in einem Behälter ist nicht zuletzt eine **finanzielle Frage**: Je dichter die Behälter befüllt sind, desto niedriger sind die Lager- und Transportkosten. Der PACK*Assistant*, eine speziell für die Berechnung von Packproblemen entwickelte Software, liest ein 3-D-Computermodell des zu packenden Teils und die Maße des Behälters ein. Dann entwickelt er eine verständliche grafische Darstellung des Packvorgangs. So können gleiche Bauteile mit optimaler Raumausnutzung in regelmäßigen, stabilen Lagen verpackt werden. Es wird auch eine möglichst einfache Befüllung und Entnahme berücksichtigt.

Das Fraunhofer-Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen SCAI modelliert und optimiert industrielle Anwendungen, entwickelt Software und bietet Berechnungen auf Hochleistungscomputern.

~~~~~~

14. Zykloide: Die Reise des Ventils auf dem Fahrradreifen

Wie sieht die Kurve aus, die ein Ventil beschreibt, wenn man mit dem Fahrrad fährt?

Konkrete Beispiele geometrischer Kurven und Flächen dienen in der Mathematik zur Lösung von Gleichungen und sind Ausgangspunkt und Basis für Näherungslösungen. Deshalb ist es wichtig, viele geometrische Kurven und ihre charakteristischen Eigenschaften zu studieren.

Rollt man einen Kreis entlang einer Geraden ab, so beschreibt jeder Punkt auf dem Kreisrand eine Kurve – eine so genannte **Zykloide**. Diese ist vergleichbar mit dem Weg, den ein Ventil an einem Fahrradreifen während der Fahrt zurücklegt.

In der Getriebetechnik dient die so genannte **Zykloidenverzahnung** als Technik zur Verzahnung von Zahnrädern und Zahnstangen. Die zu Zykloiden gehörige Differentialgleichung dient u. a. auch zur Beschreibung spezifischer **kosmologischer Modelle**.

Exponat vom Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut).

~~~~~~
~~~~~~

15. Gefangenendilemma

Versetzen Sie sich in die Lage eines Gefangenen, der gemeinsam mit einem Komplizen unter dem Verdacht, eine Straftat begangen zu haben, verhaftet wurde. Die Höchststrafe für das Verbrechen beträgt fünf Jahre.

Sie werden beide unabhängig voneinander befragt, und jedem von Ihnen wird mit Wissen des jeweils anderen ein Handel angeboten: Wenn einer gesteht und somit seinen Partner mitbelastet, kommt er ohne Strafe davon; der andere muss fünf Jahre absitzen. Entscheiden sich beide zu schweigen, werden beide aufgrund von Indizien zwei Jahre eingesperrt. Gestehen aber beide, erhält jeder vier Jahre Haft. Die Strafe für jeden Spieler hängt also nicht nur von der eigenen Entscheidung, sondern auch von der des Komplizen ab.

Dieses so genannte Gefangenendilemma illustriert die Theorie der ‚nichtkooperativen Spiele'. Dabei wird deutlich, wie individuell rationale Entscheidungen zu kollektiv schlechteren Ergebnissen führen können. Würden beide Gefangenen schweigen, bekäme jeder zwei Jahre Haft. Gemeinsam würden sie vier Jahre verlieren. Jede andere Kombination aus Gestehen und Schweigen führt zu einem höheren Verlust. Durch einen einseitigen Verrat wird der Verräter freigesprochen, wenn der Mitgefangene schweigt, oder er erhält vier statt fünf Jahre Haft, wenn der Mitgefangene gesteht. Versuchen beide einen einseitigen Verrat, erhalten beide vier statt zwei Jahre Haft.

Das Mathematikum in Gießen ist das erste mathematische Mitmach-Museum der Welt. An über 120 Exponaten führen die Besucher selbstständig Experimente durch und entdecken dabei mathematische Phänomene.

~~~~~~

16. Mathematische Paradoxien

Der verschwundene Kobold

Ein Experiment mit Kobolden zeigt ein verblüffendes Phänomen: Auf einer Platte sind 15 verschiedene Kobolde abgebildet. Ein Duplikat dieser Platte ist durch einen waagerechten und einen senkrechten Schnitt in drei Teile zerlegt, von denen der untere fixiert ist, während die beiden oberen beweglich sind. Wir verschieben die Teile und stellen fest: ein Kobold ist verschwunden. Welcher der Kobolde ist verschwunden, und wo ist er abgeblieben?

So paradox es klingt: Das Zerlegen einer Platte in drei Teile und eine Veränderung der Anordnung dieser Teile führt zu einer veränderten Anzahl der dargestellten Kobolde. Doch taucht der Kobold wieder auf, wenn die beiden oberen Platten erneut vertauscht werden. Offenbar hat die waagerechte Trennlinie einen Einfluss auf das Verschwinden.

Die Analyse zeigt: Bei der waagerechten Zerlegung bleiben zwei Kobolde vollständig erhalten, 13 werden in je zwei Teile zerlegt. Durch die Verschiebung wird dem vollständig oberhalb stehenden Kobold ein kleines Stück unterhalb und dem vollständig unterhalb stehenden ein kleines Stück oberhalb angefügt. Die verbleibenden je zwölf Teile oberhalb und unterhalb bilden zwölf „neue" Kobolde.

Die Verschiebung der Teile macht deutlich, wie sich ein Paradoxon erklären lässt. Die Beschäftigung mit dem verschwundenen Kobold motiviert dazu, sich mit Aufgaben und Problemen zu befassen, die unerwartete Lösungen liefern und daher in starkem Maße zum Nachdenken anregen.
~~~~~~

Simpson'sches Paradoxon: Eimer vergleichen
Für ein Experiment zur Ermittlung der zu vergleichenden Wahrscheinlichkeiten verwenden wir die Platten A, B und C mit jeweils einem blauen und einem gelben Eimer. Auf Platte A enthält der blaue Eimer 5 rote und 6 weiße Kugeln, der gelbe 3 rote und 4 weiße Kugeln. Auf Platte B enthält der blaue Eimer 6 rote und 3 weiße Kugeln, der gelbe 9 rote und 5 weiße Kugeln. Bei welchem Eimer der Platte A die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, am größten? Wie sieht es auf Platte B aus?

Füllen wir nun den Inhalt der blauen Eimer von A und B in den leeren blauen Eimer von C und den der gelben Eimer von A und B in den leeren gelben Eimer von C.
Welches Ergebnis wäre zu erwarten, und welches finden wir tatsächlich vor? – Auf Platte C befinden sich nach dem Zusammenschütten im blauen Eimer 11 rote und 9 weiße Kugeln, im gelben Eimer 12 rote und 9 weiße Kugeln.

Das Simpson-Paradoxon zeigt, dass mit ganz einfachen Mitteln die Aussage einer Statistik verändert werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, ist zunächst in den blauen Eimern am größten. Dies ändert sich, wenn man die Kugeln aus den blauen bzw. gelben Eimern der Platten A und B in den Eimern auf Platte C zusammengeworfen hat. Nun ist die Wahrscheinlichkeit im gelben Eimer am größten.

Die Erkenntnisse des britischen Statistikers Edward Hugh Simpson zeigen, dass die beim Zusammenschütten erfolgte Gewichtung der unterschiedlichen Anzahl der Kugeln in den Eimern verantwortlich für das überraschende Ergebnis ist. Das Ergebnis belegt, dass schon durch das Zusammenfassen einzelner Ergebnisse das Gesamtergebnis einer statistischen Erhebung stark beeinflusst werden kann.

Die Professur für Didaktik der Mathematik an der Technischen Universität Dresden bietet insbesondere für Lehramtsstudenten eine Veranstaltung „Paradoxien und Mathematikunterricht" an, deren Gegenstand auch die Behandlung des Simpson-Paradoxon ist.

~~~~~~

17. Optimierung bei Pannenhilfe
Für Pannenhelfer soll eine Tour entwickelt werden, die es erlaubt, alle Pannen innerhalb von 30 Minuten und zu möglichst geringen Kosten anzufahren. Wie ist diese Aufgabe lösbar?

Das Tourenplanungsproblem mit Verspätungskosten ist eine Verallgemeinerung des berühmten Problems des Handlungsreisenden. Gefragt ist eine Tour, die schnell ist und bei der man die Ziele möglichst pünktlich erreicht. Dieses Problem tritt in der Praxis unter anderem beim ADAC auf, wo für bis zu 200 Pannenhelfer optimale Touren bei bis zu 700 Pannen bestimmt werden müssen. Aufgrund des komplizierten Berechnungsaufwandes ist dies eine der schwierigsten Fragestellungen aus der Gruppe der so genannten NP-schweren Probleme, die zu den Komplexitäts-Problemen zählen.

Die Kosten einer Tour berechnen sich aus der Gesamtzeit der gefahrenen Strecke und jeweils 5 Euro für jede Minute, die über eine Wartezeit von 30 Minuten hinausgeht. Prinzipiell kann man zum Bestimmen der besten Tour alle Möglichkeiten durchprobieren. Doch bereits bei 40 Pannen gibt es mehr Möglichkeiten als Atome im Universum. Mit Hilfe moderner Methoden der kombinatorischen Optimierung lassen sich auch für große Probleminstanzen aus der Praxis in wenigen Sekunden optimale Lösungen berechnen.

Die Arbeitsgruppe Optimierung der TU Kaiserslautern beschäftigt sich mit der Analyse von Lösungsverfahren für diskrete Optimierungsprobleme. Das vorgestellte Problem wurde im Team unter Prof. Dr. Sven O. Krumke entwickelt.
~~~~~~

18. Zahlen, bitte! – Aber sicher. Primzahlen und Verschlüsselung

Die meisten Menschen benutzen ganz selbstverständlich das Internet oder den Geldautomaten, bestellen im Onlineshop oder tätigen Überweisungen. Doch wie wird dabei die **Sicherheit** garantiert?

Viele Mathematiker entwickelten Konzepte, bis schließlich 1977 das **RSA-Verfahren** entstand, benannt nach dessen Erfindern R. Rivest, A. Shamir und L. Adleman. Angewandt wurde es zunächst vom britischen Geheimdienst. Es ist so raffiniert, dass es auch heute noch zu den sichersten Methoden weltweit zählt und vielfältige Anwendung findet. Selbst die modernsten Computer der Welt können RSA-**verschlüsselte Botschaften** nicht entziffern, denn es ist ungeheuer schwierig, eine große Zahl in ihre Faktoren zu zerlegen. Damit erlauben ‚sichere Zahlen' auch sicheres Zahlen.

Selbst Zahlen, die nicht sehr groß sind, lassen sich oft nur schwer in ihre Primfaktoren zerlegen. Im Kopf lässt sich 35 = 5 x 7 noch schnell berechnen. Doch wie sieht es mit größeren Zahlen aus? Und vor allem: Wie lange würde es dauern, sie zu ‚knacken'? Primzahlen spielen bei der RSA-Verschlüsselung eine besondere Rolle und werden deshalb genauer unter die Lupe genommen. Um einen Einblick in die spannende Welt von **Primzahlen, Faktorisierung und Verschlüsselung** zu bekommen, finden Sie heraus, ob Ihr Geburtsdatum eine Primzahl ist und versuchen Sie selbst, eine geheime Nachricht zu entschlüsseln!

Der Exzellenzcluster Hausdorff Center for Mathematics in Bonn bündelt die vielfältige mathematische Forschung vor Ort insbesondere mit dem Ziel, mathematische Grundlagenforschung und ausgewählte Anwendungen parallel voranzbringen.

~~~~~~

19. Rundreisen – Das „Travelling-Salesman-Problem

Wer eine Tour durch ein Land unternehmen und dabei so viele Städte wie möglich über die kürzestmögliche Route erreichen will, der hat eine Nuss zu knacken, bevor er sich auf den Weg begeben kann.

Das Travelling-Salesman-Problem – kurz: **TSP** – ist das bekannteste Problem der **kombinatorischen Optimierung**. Im Jahr 1954 gelang es erstmals, eine beweisbar kürzeste Tour durch 49 Städte zu bestimmen. Das TSP hat seither Forscher und Praktiker aus Mathematik, Informatik, Betriebs- und Technikwissenschaften fasziniert. Das derzeit größte **beweisbar optimal** gelöste TSP umfasst **89.500 Städte**. Das TSP hat viele Anwendungen in Logistik und Transport, Technik und Telekommunikation und sogar in Biologie und Archäologie.

Will man 15 Städte besuchen, gibt es ½ x 2 x 3 x 4 x … x 14 = 43.589.145.600 mögliche Reiserouten. Bei 25 Städten sind es 3 x 10^{24} und bei 40-Städten 10^{46}. **Das Ausprobieren aller Touren ist also unmöglich**. In der Praxis werden zur Lösung sehr großer TSPs häufig Heuristiken eingesetzt. Das sind Algorithmen, die „intelligent herumprobieren".
Alle erfolgreichen Methoden zur Bestimmung beweisbar optimaler Lösungen basieren auf **‚Branch & Bound'-Verfahren**, die Schnittebenenalgorithmen der linearen Optimierung einsetzen.

Das Konrad-Zuse-Zentrum und das DFG-Forschungszentrum MATHEON in Berlin befassen sich mit TSPs und anderen kombinatorischen Optimierungsproblemen in den verschiedensten Anwendungsgebieten. Ziel ist die Unterstützung der Entwicklung und Optimierung von Schlüsseltechnologien durch moderne mathematische Methodik.

~~~~~~

20. Steganographische Videokonferenz

Vertrauen ist gut, verschlüsseln ist besser. Aus dieser Erkenntnis heraus werden vertrauliche Inhalte in digitalen Systemen üblicherweise durch Verschlüsselung geschützt.

Der dabei entstehende „Zahlensalat“ ist ohne korrekten Schlüssel nicht verständlich. Was aber, wenn eine Verschlüsselung verboten ist – z. B. in einer Diktatur? Verschlüsselte Botschaften ziehen in besonderer Weise die Aufmerksamkeit auf sich. Damit der Absender nicht eines Morgens vom Klopfen unauffälliger Herren geweckt wird, kann er **geheime Nachrichten** in harmlose Medien **einbetten**, etwa in ein digitales Foto oder Video. Steganographische Operationen verstecken die Nachricht im nicht vorhersagbaren, zufälligen Anteil eines Mediums wie dem Bildrauschen.

Steganographische Änderungen können mit Hilfe einer speziellen Software im direkten Vergleich zwischen dem Bild mit und ohne Nachricht sichtbar gemacht werden. Das Bildrauschen überdeckt die Änderungen, so dass **für Außenstehende nicht erkennbar** ist, ob das Bild eine brisante Nachricht enthält. Das Bildrauschen wird beim Vergleich von je zwei aufeinander folgenden Bildern sichtbar. An kontrastreichen Stellen wie Kanten und Umrissen von Gegenständen ist es besonders stark. Der Empfänger extrahiert die eingebettete Nachricht mit dem korrekten Schlüssel aus dem übertragenen Bild.

*Der Lehrstuhl Datenschutz und Datensicherheit der Fakultät Informatik der **Technischen Universität Dresden** befasst sich u. a. mit Eigenschaften steganographischer Medien und Einbettungsoperationen. Eingebettete Nachrichten werden auch zum Schutz von Urheberrechten durch digitale Wasserzeichen eingesetzt. **http://dud.inf.tu-dresden.de***

~~~~~~

21. Tomographie

Wer wüsste nicht gern schon vor dem Kauf, welchen Inhalt ein Überraschungsei hat?! Die Computer-Tomographie macht es möglich, dass man in das Innere eines Körpers blicken kann, ohne ihn zu öffnen. Ein wichtiges Instrument bei der Entwicklung dieser Technologie war die Mathematik.

Die klassische **Computer-Tomographie** verwendet Röntgen-Strahlen, um exakte Informationen über die inneren Strukturen des durchleuchteten Körpers zu erhalten.
Dass diese Strukturen aus den Messwerten rekonstruiert werden können, ist eins der bedeutenden Ergebnisse der angewandten Mathematik. Die mathematischen Techniken des Gebiets der so genannten ‚Inversen Probleme’ werden auch bei Anwendungen wie der Ultraschall-, Impedanz- oder Magnet-Resonanz-Tomographie sowie bei optischen, thermoakustischen, thermo-elastischen und anderen Messverfahren angewandt. Neben Fragestellungen der **Medizin** sind die Produktionsüberwachung und die **Optimierung technischer Abläufe** die hauptsächlichen Anwendungsgebiete dieser Theorie.

In der Computersimulation eines Tomographen des Fraunhofer Instituts für zerstörungsfreie Prüfverfahren, IzfP Saarbrücken, kann man sich auf die Reise durch das Innere des menschlichen Körpers begeben. So kann man **Überraschungseier „**öffnen“, ohne sie zu zerstören, oder **Bilder fälschen**. Man erhält Informationen über den technisch-physikalischen Hintergrund der Computer-Tomographie und deren Einsatz in medizinischen und technischen Anwendungen.

Die Entwicklung effizienter mathematischer Methoden für bildgebende Verfahren in Radiologie und Industrie sind die Schwerpunkte der Arbeitsgruppen am Zentrum für Technomathematik, Universität Bremen, dem Institut für Angewandte Mathematik, Universität des Saarlandes, und dem Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Münster.
~~~~~~

22. U-Bahn-Fahrplan selbst gemacht

Unzählige Menschen sind Tag für Tag auf die bestmögliche Verbindung öffentlicher Verkehrsmittel angewiesen. Denn sie wollen schnell, pünktlich und – wenn ein Umsteigen erforderlich ist – ohne großen Zeitverlust ans Ziel gelangen.

Wie konstruiert man einen Fahrplan, der es möglichst vielen Fahrgästen recht macht und bei dem obendrein die Betriebskosten im Rahmen bleiben? Im Grunde müssten hierzu alle denkbaren Fahrpläne analysiert werden. Dies sind jedoch so viele, dass nicht jeder Fahrplan im Detail betrachtet werden kann. Die **diskrete Optimierung** dagegen versteht es, unattraktive Fahrpläne frühzeitig als solche zu identifizieren. Nur dadurch kann heutzutage für ein Netz wie das der **Berliner U-Bahn** binnen weniger Minuten der nachweislich **bestmögliche Fahrplan** gefunden werden. Verwandte Verfahren kommen täglich bei der Tourenplanung von Paketdienstleistern oder beim Design von Telekommunikationsnetzen zum Einsatz.

Für die Planer in den Verkehrsunternehmen gilt es seit jeher, den Überblick zu bewahren. Bei der Konstruktion des Fahrplans 2005 der Berliner U-Bahn haben erstmals mathematische Optimierungsverfahren diese wenig übersichtliche Aufgabe übernommen. Zur Änderung von Fahrplänen werden neue Ankunfts- und Abfahrtzeiten von U-Bahnen für die Umsteigebahnhöfe eingegeben. Lange Umsteigezeiten werden durch dicke rote Kreisbögen markiert. Eine Anpassung der Abfahrtszeit des Anschlusszuges bewirkt eine Verkürzung der Zeiten. Doch was passiert im weiteren Linienverlauf? Wurden bei der Optimierung der Zeiten andere Anschlüsse ‚geopfert'? - Ohne den Einsatz von Tourenplanungssystemen kämen Verkehrsplaner vermutlich ebenso langsam ans Ziel wie die Fahrgäste.

*Das DFG-Forschungszentrum **MATHEON** entwickelt Mathematik für Schlüsseltechnologien. An der Technischen Universität Berlin liegt ein Schwerpunkt auf Planungsproblemen in Verkehrs- und Telekommunikationsnetzwerken.*

~~~~~~
~~~~~~

AUSSTELLUNGSBEREICH GEIST

23. Sudoku

Sudoku-Rätsel erfreuen sich größter Beliebtheit. Doch was hat die Mathematik mit diesen Zahlenrätseln zu tun?

Sehr viel, aber nicht wegen der verwendeten Zahlen – diese können beliebig durch andere Symbole ersetzt werden. Vielmehr betreibt jeder Mensch beim **Lösen eines Sudokus** Mathematik. Die Mathematik, derer wir uns dabei bedienen, hat ebenfalls nichts mit Zahlen zu tun, sondern mit **Mengen** und **Baumstrukturen**. Mengen kommen in der Mathematik überall vor; bei üblichen Sudokus z. B. die Menge der Ziffern von 1 bis 9. Baumstrukturen spielen unter anderem eine wichtige Rolle beim maschinellen Rechnen, also in der **Informatik**.

Beim Lösen eines Sudokus bedienen wir uns unterschiedlicher Lösungsverfahren. Oft überprüfen wir, ob sich ein betrachtetes Feld eindeutig ausfüllen lässt. Aus Sicht der Mathematik rechnen wir dabei mit den Mengen der noch möglichen Symbole in Zeile, Spalte bzw. betrachtetem Quadrat. Lässt sich ein Feld nicht eindeutig ausfüllen, hilft systematisches Ausprobieren. Mathematisch betrachtet ist dies die Suche nach dem Ziel in einem Irrgarten, der sich wie ein Baum verästelt. Bei den modernen Anwendungsgebieten der Mathematik treten solche Baumstrukturen häufig auf.

Mathematik wird am Institut für Medieninformatik der Fachhochschule Braunschweig/Wolfenbüttel bei der Entwicklung medientechnischer Anwendungen wie Computergraphik, Webanwendungen oder Computerspielen eingesetzt.

~~~~~~

24. IMAGINARY – Algebraische Flächen Fantasien

Das Programm SURFER, frei erhältlich auf der Website surfer.imaginary2008.de, regt zum spielerischen Umgang mit der Geometrie an.

Durch Eingabe neuer und Verändern bestehender Formeln kann man Veränderungen in einem Bild beobachten. Nach einiger Zeit und mit etwas Überlegung beginnt man zu verstehen, wie die Formeln mit den Bildern, also wie Algebra und Geometrie zusammenhängen. Die Formel ist eine Gleichung in den drei Raumkoordinaten x, y und z. Alle Punkte im Raum, die diese Gleichung erfüllen, ergeben das Bild, eine algebraische Fläche. Eine besondere Rolle in der algebraischen Geometrie spielen die so genannten Singularitäten, d. h. spitze Punkte oder scharfe Kanten in den Bildern. Bei Anwendungen oder bei der Beschreibung realer Phänomene treten an diesen Punkten oft Probleme auf, bei deren Lösung die algebraische Geometrie helfen kann.

Der Name des Programms SURFER ist abgeleitet vom englischen „surface“. Das Programm ist Teil der interaktiven Wanderausstellung IMAGINARY. Eine Anleitung zu SURFER erhalten Sie über den Menupunkt Info.

Das weltweit renommierte Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO) behandelt die gesamte Breite der Mathematik einschließlich ihrer Anwendungen in Naturwissenschaften, Technik und Wirtschaft.

~~~~~~

25. Was ist Symmetrie?
Was versteht man unter einer Symmetriegruppe? Welche Möglichkeiten gibt es, symmetrische, Flächen füllende Muster zu erzeugen? Was muss man beachten, wenn man selbst in dieser Richtung kreativ tätig werden möchte, z. B. um Geschenkpapier oder Tapetenmuster zu entwerfen?

Sucht man eine Antwort auf die Frage, was die Symmetrie für einen Mathematiker ist, so wird schnell der Zusammenhang deutlich, der zwischen Mathematik und Kunst besteht.

Bemerkenswert ist, dass man einen Katalog aller Symmetriegruppen der Ebene aufstellen kann, kann, denn es gibt nur endlich viele Möglichkeiten. Auch lassen sich Handlungsanweisungen präzisieren, nach denen jeder in der Lage ist, solche Muster selbst herzustellen.

Das Anliegen von Professor Dr. Ehrhard Behrends, Mathematiker an der FU Berlin, ist die Popularisierung der Mathematik. Er arbeitet mit an der Ausstellung ‚Mathema – Ist Mathematik die Sprache der Natur?'.

~~~~~~

26. Ein Ring ist eine Tasse ist ein Rohr
Wer glaubt, dass ein Loch ein „Nichts" ist, der wird hier eines Besseren belehrt. Es ist eine topologische Eigenschaft, die durchaus seine Wirkung hat.

Die Topologie ist sozusagen die **Mathematik der verformbaren Objekte** und bildet einen der Grundpfeiler der Mathematik. Sie beschäftigt sich mit denjenigen Eigenschaften geometrischer Objekte, die von den genauen Abmessungen des Objektes unabhängig sind. Begriffe wie Länge, Winkel und Krümmung sind für die Topologie belanglos.
Bei der **Herstellung komplizierter Werkstücke** in der Industrie, z. B. im Automobilbau, spielt die Topologie eine wichtige Rolle: Topologisch komplizierte Objekte mit vielen Löchern haben je nach Anzahl ihrer Löcher unterschiedliche elektrische Eigenschaften. Auch in der Natur sind topologische Eigenschaften von Bedeutung, beispielsweise bei der Erforschung der **Funktionsweise von Eiweißen**.

Was haben Ring, Tasse und Rohr gemeinsam? Topologisch betrachtet sind sie gleich. Verformt, verbeult und verzerrt man die Objekte gedanklich, ist das Resultat aus Sicht der Topologie noch immer dasselbe Objekt. Demzufolge hat ein Ring dieselbe Topologie wie eine Henkeltasse oder ein Rohr. Denn was man durch Verdrehen und Stauchen nicht ändern kann, ist z. B. die Anzahl der Löcher in einer zweidimensionalen Fläche. - Und alle drei genannten Gegenstände haben genau ein Loch.

Am Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik wird oft mit komplizierten, abstrakten, unendlichdimensionalen Funktionenräumen gerechnet, deren grundlegende Eigenschaften man mit Hilfe der Topologie verstehen kann.

~~~~~~

27. Ein algebraisches Rätsel: Hängen Sie ein Bild auf!

Versuchen Sie, ein Bild so mit einer Schnur an einem blauen und einem gelben Stift aufzuhängen, dass es herunterfällt, sobald einer der Stifte herausgezogen wird – egal welcher!

1. Versuchen Sie zunächst, das Bild so aufzuhängen, dass
   a) die Schnur über beide Stifte verläuft und
   b) das Bild herunterfällt, sobald der blaue Nagel gezogen wird.
2. Probieren Sie nun eine Variante, bei der das Bild nach dem Ziehen eines beliebigen Stiftes herunterfällt.
3. Schaffen Sie das auch mit drei Stiften?

Viele topologische Fragen lassen sich durch **Eigenschaften von Kurven** in den zu untersuchenden topologischen Räumen ausdrücken. Dazu zieht man oft **algebraische Strukturen** heran, mit denen man topologische Eigenschaften von Räumen berechnen kann. Ein Beispiel dafür sind die ‚Fundamentalgruppen', mit deren Einführung Henri Poincaré (1854 - 1912) den Forschungszweig der algebraischen Topologie begründete.

Bei dem oben beschriebenen Experiment werden die Eigenschaften der Fundamentalgruppe einer Ebene mit zwei bzw. drei Löchern genutzt. Diese Fundamentalgruppe lässt sich mathematisch durch Buchstabenkombinationen beschreiben, z. B.: A = Die Schnur wird im Uhrzeigersinn um den blauen Stift gewickelt; A^{-1}= Die Schnur wird gegen den Uhrzeigersinn um den blauen Stift gewickelt. So kann man mit Hilfe von Symbolen und ihren Rechenregeln schnell erkennen, wie das Bild entsprechend aufgehängt werden kann. Eine Lösung für zwei Stifte lautet in symbolischer Schreibweise ‚$ABA^{-1}B^{-1}$'.

Geometrische, analytische, algebraische und topologische Methoden müssen kombiniert werden, um Phänomene der Gravitation (Schwerkraft) zu verstehen. Dies sind Forschungsthemen am Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik.

~~~~~~

28. Kaleidoskope

Was haben Kristalle mit kontinuierlichen Systemen und Symmetrien zu tun? Kaleidoskope helfen dabei, diese Phänomene zu verstehen.

Es gibt vier Arten von ebenen Vielecken, die bei einer wiederholten Spiegelung an ihren jeweiligen Kanten die Ebene füllen, ohne sich zu überlappen: Rechtecke, gleichseitige Dreiecke, gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke und rechtwinklige Dreiecke, die auch einen Winkel von 60° haben. Diese Möglichkeiten können z. B. in **Röhren-Kaleidoskopen** betrachtet werden. Andere Kaleidoskope zeigen mit einem anders geformten Dreieck, wie bei der Spiegelung Überlappungen entstehen. Man kann auch Kaleidoskope in ‚gekrümmten Räumen' betrachten. Beispiele für Bilder, die dabei entstehen, sind die "**Kreislimits**" genannten Abbildungen des **Künstlers M. C. Escher**.

Eine analoge dreidimensionale Struktur zeigt das **Raum-Kaleidoskop**: Die vier Ecken dieser innen verspiegelten schiefen Pyramide erhält man, indem man sich einen Würfel denkt und eine Ecke des Würfels, die Mitte einer angrenzenden Kante, die Mitte einer angrenzenden Fläche und den Mittelpunkt des Würfels zu Ecken bestimmt. Das Studium solcher Raum-Kaleidoskope ist grundlegend für das **Verständnis von Kristallen**. Kaleidoskope in beliebigen Dimensionen sind übrigens auch eng mit der Untersuchung kontinuierlicher **Systeme von Symmetrien** verknüpft, die in der Physik und der **Zahlentheorie** grundlegende Bedeutung haben.

Am Mathematischen Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg werden unter anderem Fragestellungen zu kontinuierlichen Systemen von Symmetrien untersucht.
~~~~~~

29. Bewegung im Raum – Tetraeder durch „Tropfenloch“ fädeln

Schiebt man eine dreiseitige Pyramide, ein so genanntes „reguläres Tetraeder“, durch ein Loch in einer Plexiglasplatte, kann man gut beobachten, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, den Bewegungsablauf zu steuern.

Das Experiment scheint sehr einfach zu sein. Doch treffen dabei verschiedene mathematisch-geometrische Wissensgebiete aufeinander: Das *bewegte Objekt* – das reguläre Tetraeder – ist dasjenige unter den fünf konvexen Platonischen Körpern, das die geringst mögliche Ecken- und Flächenzahl eines Polyeders aufweist. Das *feste Objekt* – eine Platte – hat ein besonders geformtes Loch, dessen Form das Ergebnis einer Optimierungsaufgabe ist. Der durchaus komplizierte *Bewegungsvorgang* soll Sie an Steuermechanismen bei Maschinen und Gelenken und an Robotik denken lassen. Dem Objekt-Ensemble ist eine gewisse strenge Ästhetik nicht abzusprechen. Es stellt auch eine Verbindung zwischen Kunst und Mathematik her.

Alle Objekte unserer zivilisierten Umwelt unterliegen einem Design. Sie sind also erst einmal ‚geometrisiert’ worden, bevor sie hergestellt werden konnten. Ebenso musste ein Design für Bewegungsabläufe und Maschinen entwickelt werden, die zur Produktion dieser Objekte nötig sind. Mit einem regulären Tetraeder und einer Plexiglasplatte mit einem Loch können Überlegungen zum Design von Objekten und Bewegungsabläufen auf anschauliche Weise nachvollzogen werden.

Das Institut für Geometrie der TU Dresden befasst sich u. a. mit praktischen und theoretischen Fragen, die beim Design von Objekten, Bewegungsabläufen und Maschinen auftreten.

~~~~~~

30. Möbiusband

Alles hat zwei Seiten. Wirklich alles? Das Möbiusband beweist, dass dem nicht so ist. In sehr unterschiedlichen technischen Anwendungen zeigt sich, wie vielseitig diese „Einseitigkeit“ doch ist.

Flächen treten klassischerweise als Teile der **Oberflächen von Körpern** auf: Die Sphäre ist die Oberfläche der Kugel, der Zylinder die Seitenwand einer Säule. Solche Flächen haben **zwei Seiten**: Eine innere Seite, die dem Körper zugewandt ist, und eine äußere Seite. Anders das **Möbiusband**. Es entsteht durch Verkleben der Enden eines Streifens, wobei man den Streifen entlang der Längsachse um 180° dreht. Das Möbiusband hat **nur eine Seite** und kann daher nicht Teil des Randes eines Körpers sein. Entdeckt wurde es 1858 von den Mathematikern Listing und Möbius.

In der Technik werden Möbiusbänder zum Beispiel als Antriebsriemen, Förderbänder oder Tonbänder verwendet. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass bei ihnen das Material gleichmäßiger verschleißt bzw. dass sich die Abspielzeit im Vergleich zur Länge des Bandes verdoppelt, weil ‚beide Seiten’ des Bandes genutzt werden. Auch die Natur kennt das Phänomen des Möbiusbandes: Es gibt Proteine, die wie ein Möbiusband aufgebaut sind.

An den Max-Planck-Instituten für Mathematik und für Mathematik in den Naturwissenschaften werden grundlegende Fragestellungen in Algebra und Zahlentheorie, Analysis, Geometrie, Mathematischer Physik und Wissenschaftlichem Rechnen erforscht. Dazu kommen jährlich mehrere hundert Gastwissenschaftler aus aller Welt nach Bonn und Leipzig.
~~~~~~

31. eScrabble

Wie kann man **Elektronik** in Bereiche **integrieren**, die eigentlich nichts mit Elektronik zu tun haben? Und welchen Schaltungsaufbau muss man wählen, damit das Gesamtsystem möglichst winzig wird? Mit solchen Fragen beschäftigt sich die **Mikrosystemtechnik**. Durch sie ist es möglich, dass z. B. eine Jacke mit textiler Tastatur und flexiblen Displays ihren Kleidungscharakter behält und zugleich innovative technische Funktionen übernehmen kann. Dabei zeigt sich immer mehr, dass nicht die Elektronik ihren Einsatzort bestimmt, sondern umgekehrt.

Das Spielsystem der Steinebänke erkennt die Steinewerte und berechnet noch vor dem Anlegen die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl. Möglich ist dies durch die **drahtlose Vernetzung aller Spielelemente**. Die gesamte Elektronik muss auf weniger als drei Millimeter Spielhöhe untergebracht werden. Unterstützt wird das Spiel durch einen Laptop, auf dem ein Thesaurus und ein Algorithmus zur Ermittlung des **‚optimalen' Worts** hinterlegt sind. Das elektronisch unterstützte Brettspiel ist pädagogisch interessant, denn Personen mit Lese-Rechtschreibschwäche profitieren vom spielerischen Umgang mit der Schriftsprache.

Das Fraunhofer-Institut für Zuverlässigkeit und Mikrointegration ist weltweit führend bei der Erforschung von Aufbau- und Verbindungstechnik im Mikro- und Nanometermaßstab für mikroelektronische Anwendungen.

~~~~~~

32. Geometrische Körper

Unsere Umwelt ist von geometrischen Körpern mit vielfältigen Formen geprägt. **Im Alltag** werden wir in verschiedener Weise mit ihnen konfrontiert – beispielsweise bei konkreten Handlungen wie dem Bauen von Körpermodellen, beim Erkunden von **Bauwerken** oder beim Öffnen oder Verschließen von **Verpackungen**. Aber auch bei typischen mathematischen Tätigkeiten wie dem Beschreiben, Ordnen, Systematisieren und Vergleichen beschäftigen wir uns mit ihnen. In zunehmendem Maß werden sie bei abstrakten Operationen wie der so genannten Kopfgeometrie genutzt, dem Problemlösen ‚in der Vorstellung'. Nicht zuletzt spielen sie eine Rolle bei funktionalen oder ästhetischen Aspekten, z. B. in der **Architektur** oder bei der Konstruktion von **Containern oder Tankwagen**.

In unserer unmittelbaren Umgebung können wir eine Vielzahl geometrischer Körper identifizieren und benennen. Im nächsten Schritt können wir trainieren, Körperformen und deren Eigenschaften zu beschreiben, geometrische Körper miteinander zu vergleichen und miteinander in Beziehung zu setzen. Auch das Lösen von Aufgaben und Problemen mit räumlichen Bezügen – konkret und in der Vorstellung – kann geübt werden.

Der Cornelsen Verlag erstellt Bildungsmedien mit hohem Alltagsbezug für den Mathematikunterricht. Damit fördert er die Auseinandersetzung mit und die Lösung von mathematischen Problemen.

~~~~~~
~~~~~~
~~~~~~

ÜBERSICHT

Bereich Natur	
Galton´sches Brett	Technische Universität Dresden, Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
Gezeitenberechnung	Deutsches Schiffahrtsmuseum Bremerhaven
Hochwassersimulation GRIMEX	Fraunhofer-Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen SCAI, St. Augustin Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM, Kaiserslautern
Minimalflächen	Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Potsdam und Hannover
Strömungsmodellierung im Weltozean	Exzellenzcluster „Ozean der Zukunft“, Kiel
Tsunami-Frühwarnsystem	Helmholtz-Zentrum Potsdam – GFZ Deutsches GeoForschungsZentrum
Winkelsumme von Dreiecken im gekrümmten Raum	Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Potsdam und Hannover
Bereich Technik	
Adaptive Optimierung von Flugprofilen	Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics WIAS, Berlin
Brachistochronen-Problem	Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Potsdam und Hannover
Fehlerfindung auf Kuhhäuten	Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM, Kaiserslautern
Fourier-Exponat	Prof. Otto Lührs, Berlin
Integriertes Navigationssystem für die Binnenschifffahrt	Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme, Magdeburg
Packassistant	Fraunhofer-Institut für Algorithmen und Wissenschaftliches Rechnen SCAI, St. Augustin
Zykloide	Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Potsdam und Hannover
Bereich Mensch	
Gefangenendilemma	Mathematikum Gießen
Mathematische Paradoxien	Technische Universität Dresden, Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
Optimierung bei Pannenhilfe	Technische Universität Kaiserslautern, Fachbereich Mathematik
Primzahlen und Verschlüsselung	Hausdorff Center for Mathematics, Universität Bonn
Routenplanung	Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik (ZIB), Berlin Technische Universität Berlin, DFG-Forschungszentrum MATHEON
Steganografie	Technische Universität Dresden, Fakultät Informatik
Tomografie	Fraunhofer Institut für zerstörungsfreie Prüfverfahren IzfP, Saarbrücken Universität Bremen, Zentrum für Technomathematik Universität Saarbrücken, Institut für Angewandte Mathematik Westfälische Wilhelms Universität Münster, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
U-Bahn-Fahrplan-Optimierung	Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik (ZIB), Berlin Technische Universität Berlin, DFG-Forschungszentrum MATHEON
Bereich Geist	
Die Mathematik hinter den Sudoku-Rätseln	Fachhochschule Braunschweig-Wolfenbüttel, Institut für Medieninformatik
Flächenfantasien	Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
Symmetrien	Freie Universität Berlin, Fachbereich Mathematik und Informatik, Institut für Mathematik
Topologie	Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Potsdam und Hannover
Variationsrechnung	Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Potsdam und Hannover
Kaleidoskope für affine Spiegelungsgruppen	Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Mathematisches Institut
Sonstige Bereiche	
Bewegung im Raum (Tetraeder „einfädeln“)	Technische Universität Dresden, Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
Elektronische Tafel (Präsentation)	xThink Deutschland GmbH, Wiesbaden
eScrabble	Fraunhofer-Institut für Zuverlässigkeit und Mikrointegration IZM, Berlin
Geometrische Körper	Cornelsen Verlag, Berlin
Mathekänguru	Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
Mathematik-Training mit Spaß	Nintendo of Europe GmbH
Möbiusband	Max-Planck-Institut für die Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn
Reiskorn: Film über Exponentialfunktion	Freie Universität Berlin, Fachbereich Mathematik und Informatik, Institut für Mathematik
Ultimatum-Spiel (Präsentation)	Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung ZEW, Mannheim
Zahlenschrank	Heinz Nixdorf MuseumsForum HNF, Paderborn